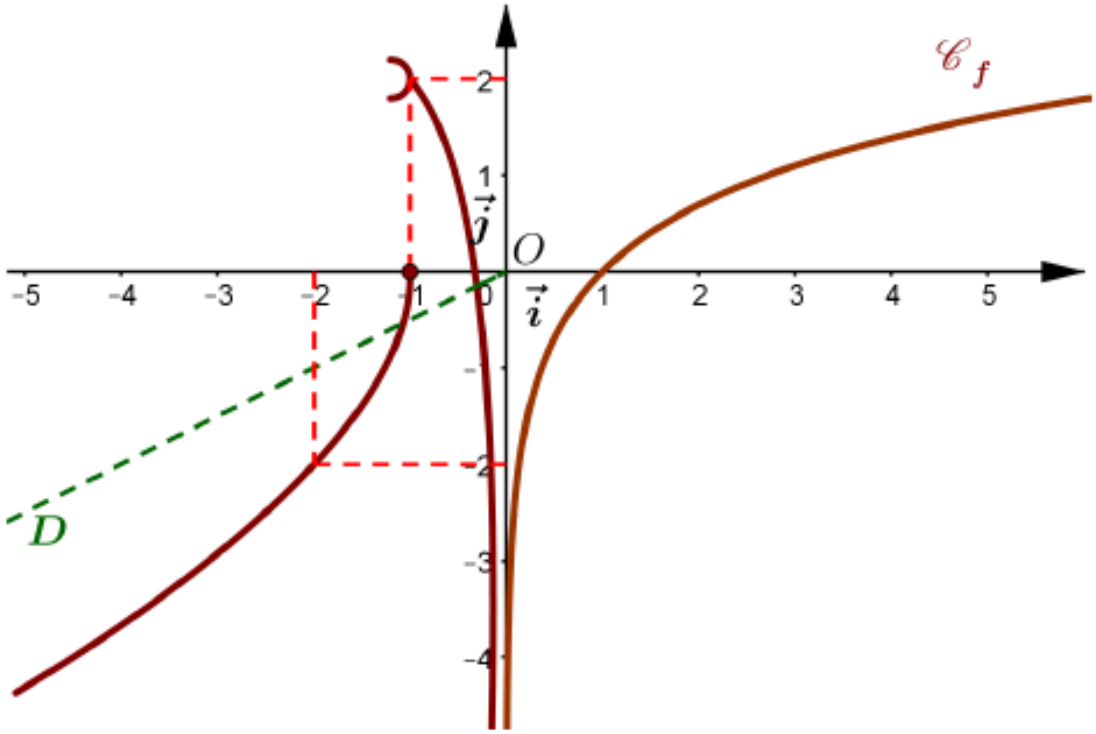
EXERCICE N°1 : 6 points 40 '

Dans la figure ci-dessous, on donne la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'une fonction f.

- $\mathscr{C}_f$ admet une branche asymptotique de direction $(D): y=\frac{1}{2}x$ au voisinage de $-\infty$.
- $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{i})$ au voisinage de $+\infty$.
- L'axe des ordonnées est une asymptote à $\mathscr{C}_f$.
- $\mathscr{C}_f$ admet exactement un saut fini en -1 est un saut infini en 0.

Par lecture graphique :



1°) Déterminer L'ensemble de définition D_f de f ainsi D_c son domaine de continuité.

2°) Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f\circ f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}2f(x)-x$, et $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)\sin\left(\frac{1}{f(x)}\right)$.

3°) On admet que sur $]0,+\infty[$ f vérifie la relation : $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$.

Tous droits réservés © TakiAcademy.com

a) Montrer $\lim\limits_{x\to 0^+} x f(x)=0$ puis déduire $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x f(x)}$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} x f(\sin x)$ et $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) f(\cos x)$.

4°) Soit g une fonction définie et continue sur IR dont le tableau de variation ci-dessous et soit

$$h(x)=f\circ g(x).$$

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
g	0	↘	-2	↗	-1	↗	0	↗	5

a) Montrer que h est définie sur $IR\setminus\{2\}$.

b) Montrer que h est continue sur $[-3,1]$.

c) Montrer que h est strictement croissant sur $[-3,1]$.

d) Montrer que l'équation $h(x)=-1$ admet une unique solution α dans $]-3,1[$.

EXERCICE N°2 : 7 points 40 '

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+\cos(\pi x)}{x-1}+x-1 & \text{si } x<1\\ \sqrt{x^2+x+2}-x & \text{si } x\geq 1\end{cases}$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) Calculer $\lim\limits_{+\infty} f$. Interpréter graphiquement le résultat.

2°) a) Montrer que pour tout $x\in]-\infty,1[$ on a : $\dfrac{x^2-x+2}{x-1}\leq f(x)\leq x$.

b) Calculer $\lim\limits_{-\infty} f$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

3°) Montrer que f est continue sur IR.

4°) a) Montrer que l'équation $f(x)=x-1$ admet au moins une solution $\alpha\in\left]-\dfrac{1}{2},0\right[$.

b) Vérifier que : $\tan(\pi\alpha)=\dfrac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}$.

5°) Soit g la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $g(x)=f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)$.

: 23390248 - 29862815
Tous droits réservés © TakiAcademy.com

EXERCICE N°3 : 7 points 40 '

1°) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-\sqrt{2}(1+i)z-1+i=0$

b) Vérifier que les solutions de (E) s'écrivent sous la forme $z_1=2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{i\frac{\pi}{8}}$ et $z_2=2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{5i\frac{\pi}{8}}$.

2°) Soit θ un réel de $]0;\pi[$.

a) Vérifier que $e^{2i\theta}-2i\sin\theta\, e^{i\theta}=1$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ) : $z^2-2e^{i\theta}z+2i\sin\theta\, e^{i\theta}=0$.

3°) Dans le plan complexe, muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{OI},\vec{OJ}\right)$, on considère les points $A\left(e^{i\theta}+1\right)$, $B\left(e^{i\theta}-1\right)$ et $C\left(1-e^{-i\theta}\right)$.

a) Déterminer l'ensemble des points C lorsque θ décrit $]0,\pi[$.

b) Montrer que A, B et C sont alignés.

c) Montrer que le triangle OAB est rectangle en O.

d) Déterminer θ pour que le triangle OAB soit isocèle.

4°) On prend $\theta=\frac{\pi}{5}$. Soit $M(z)$ un point du plan et soit $M'(z')$ tel que $z'=\frac{z-e^{i\theta}-1}{z-e^{i\theta}+1}$ $\left(z\neq e^{i\theta}-1\right)$.

a) Déterminer l'ensemble des points M pour que z' soit imaginaire.

b) Montrer que si M varie sur la médiatrice de $[AB]$ alors M' varie sur un cercle que l'on précisera.

: 23390248 - 29862267
Tous droits réservés © TakiAcademy.com